共分散分析(ANCOVA: analysis of covariance)

2011/06/15

心理データ解析演習

M1　**日道　俊之**(**ひみち　としゆき**)

共分散分析とは？

- 独立変数による従属変数値の変動の中から，剰余変数の効果を統制することを目的とした分析
  - これを使用することで，より検定力の高い分析が可能に
- 「回帰分析」と「分散分析」を組み合わせた方法というイメージ

剰余変数とは

例. 数学のテストに対し，勉強法Aと勉強法B，勉強法Cのどれが有効？

テストの得点(従属変数)の変動

= 勉強法の効果(独立変数による効果) + 誤差

誤差 = 系統誤差(剰余変数) + 偶然誤差(理論上統制は不可能)

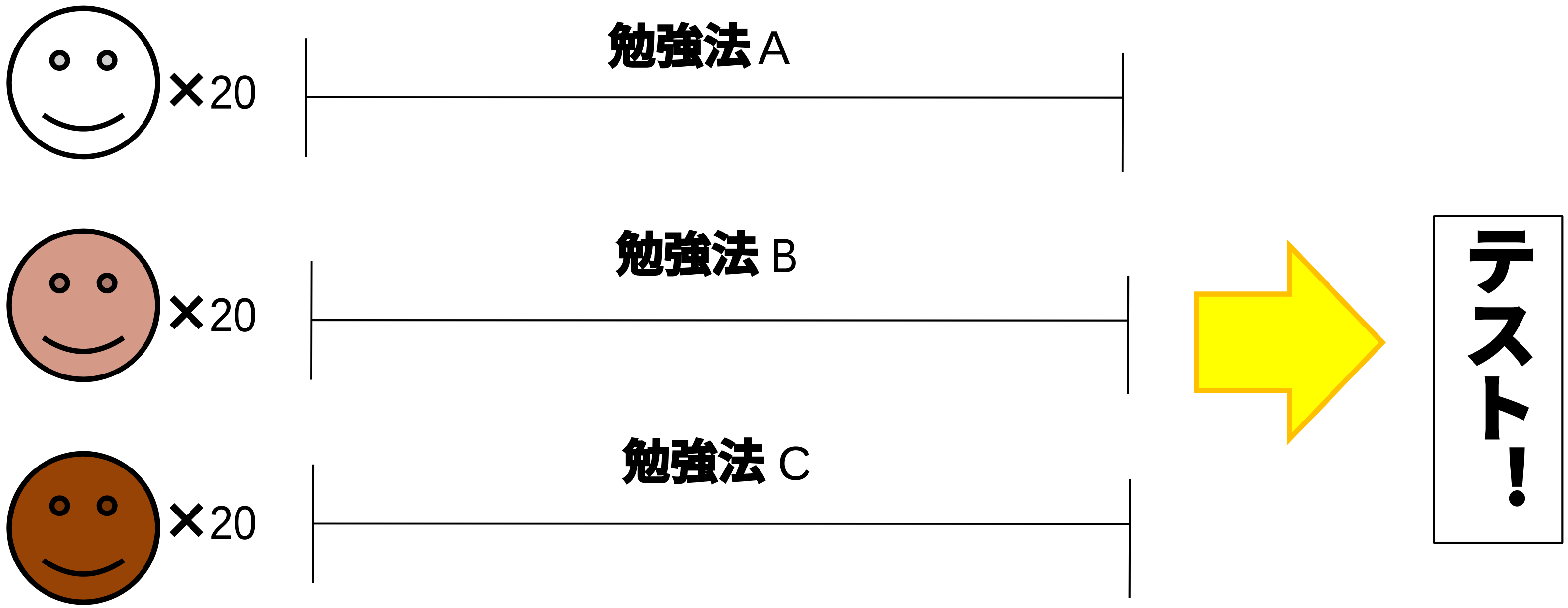
※剰余変数は従属変数値に影響を与える

→上の例だと，やる気や勉強量などなど…

- 実験では，剰余変数を統制することが重要な点の1つ

剰余変数を統制する理由

- さきほどの例で，勉強法A・B・Cで勉強する人を別々の人とする(勉強法を参加者間要因とする)



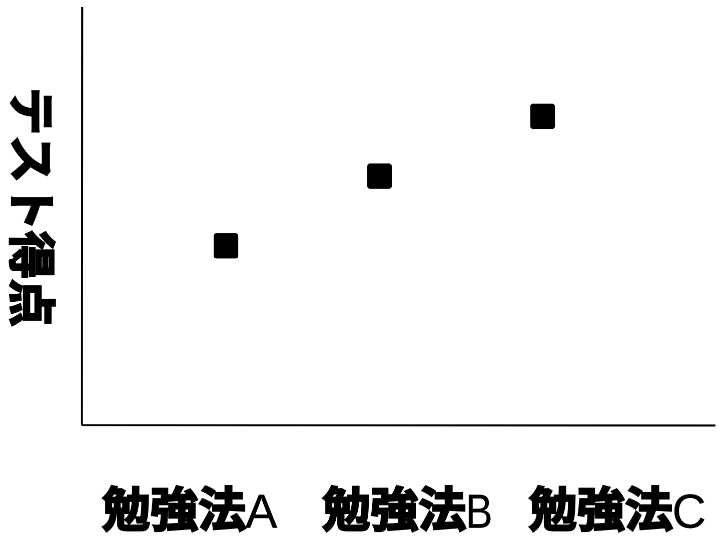
剰余変数を統制する理由②

- この場合のかなりざっくりとした分散分析のイメージ

F(検定量) = 勉強法による変動/ 誤差による変動

- 勉強法による変動が誤差による変動に比べて大きければ(F値が大きければ)，勉強法によりテストの得点が変動した可能性が高いといえる

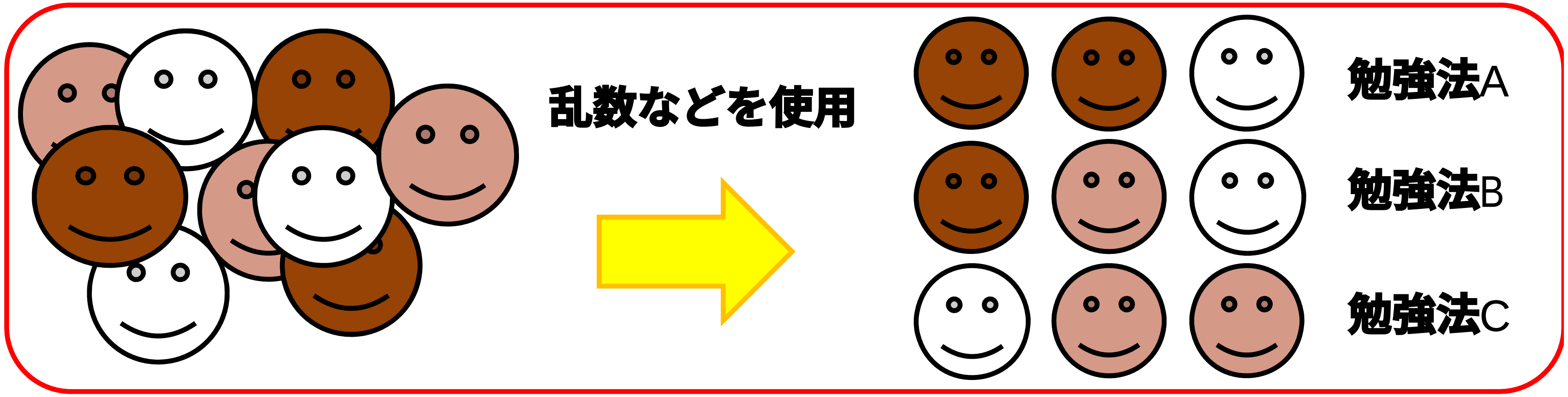
この場合各勉強法群において，テストへのやる気に偏りが生じていたら，それも誤差に含まれているため，検定力が低下する



剰余変数を取り除く方法①

主な方法その①：無作為化

- 剰余変数に偏りが生じないように，でたらめに各実験条件に実験単位をあてはめる
  - 先程の例でいうと，参加者をランダムに各群にふりわける

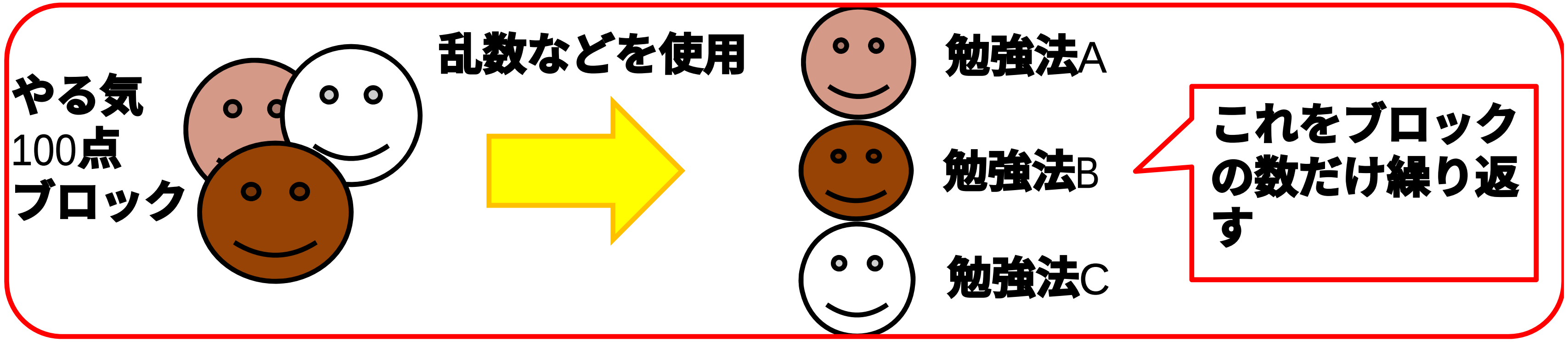


⇒剰余変数の値をでたらめに決定したからといって，必ずしも剰余変数を統制できたとはいえないため，消極的な方法

剰余変数を取り除く方法②

主な方法その②：ブロック化

- 剰余変数が(ほぼ)等しい実験単位を1つのブロックとし，ブロック内で各実験条件に振り分ける
  - 先程の例でいうと，テストへのやる気が同じ3人の人を1ブロックとし，その3人の中でランダムに別々の勉強法を実施させる

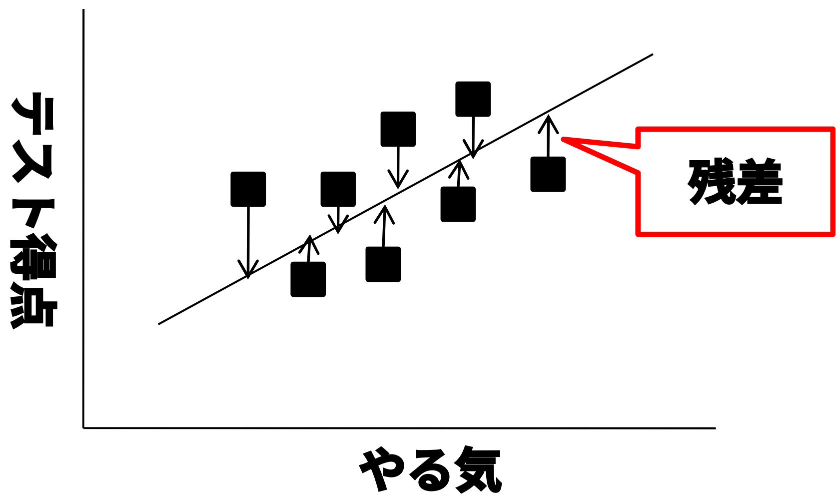


⇒剰余変数の数が複数になると，これらを完全に統制可能なブロック化を行うことが困難

剰余変数を取り除く方法③

主な方法その③: 共分散分析

- 各実験条件内における共変量と従属変数の間の相関関係から回帰直線を求め，残差得点を算出し，これについて分散分析を行う
  - 共変量: 従属変数に影響を与える剰余変数
  - 残差: 回帰分析における，予測値と実測値の差
  - 残差得点: (実際のテスト得点) – (やる気から推定されるテスト得点)



共分散分析の前提

- 共分散分析を行うための前提が存在
  - ① 無作為な標本抽出
  - ② 母集団の分布の正規性
  - ③ 分散の等質性
  - ④ 共変量と独立変数の間の交互作用が有意でない(回帰の平行性)
  - ⑤ 共変量と従属変数の間に有意な直線的な関係がある(回帰の有意性)
  - ⑥ 共変量と従属変数の間の関係が非直線的でない

- ①~③は分散分析の前提と同じ

共分散分析の前提②

- 無作為抽出
  - データがなんらかの特性について母集団から偏った標本から測定されたものではない
  - 個々の測定値が相互に独立している
- 母集団の分布の正規性
  - データの分布が正規分布に従う
- 分散の等質性
  - 各水準の母分散が等質

共分散分析の前提③

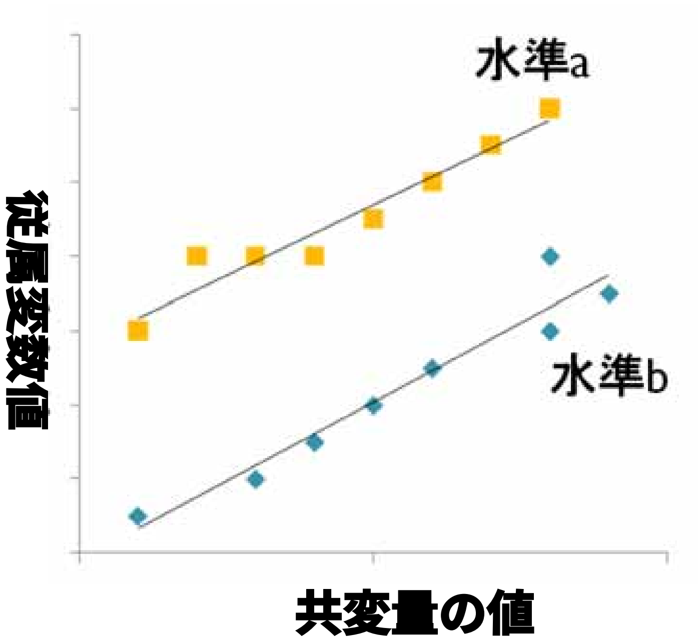
- 回帰の平行性
  - 各水準における共変量と従属変数の相関関係は等質でないといけない

- 独立変数の各水準において，共変量と従属変数の相関関係が等質でない場合，共変量と独立変数の間に交互作用があるのと同じといえる

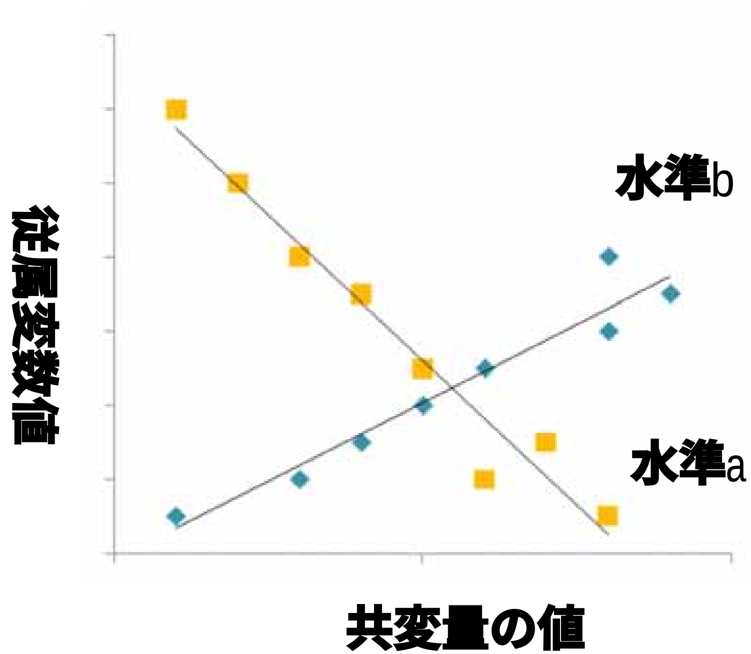
- 独立変数と共変量の間の交互作用が有意である場合，共変量の変動は独立変数の効果に含まれると考えるべき

共分散分析の前提④

前提クリア！



前提クリアできず……

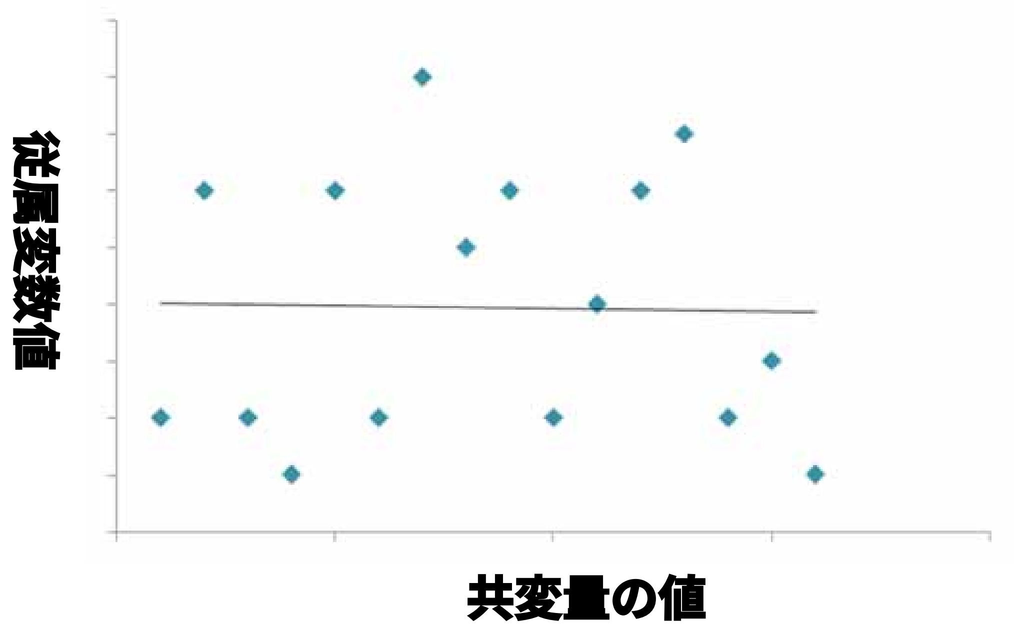


共分散分析の前提⑤

■ 回帰の有意性

- 従属変数と共変量の間に有意な直線的関係がない場合，そもそも共分散分析を行う意味がない

⇒共変量を無視し，分散分析を行う



SPSSで共分散分析をやってみよう

例.3つの勉強法のうちどちらが効果のある方法か，小テストの得点(10点満点)を従属変数，やる気得点(5点満点)を共変量として検定する

データの読み込み

① Excelデータをダウンロードし，SPSSを立ち上げる
② 【ファイル(F)】→【開く(O)】→【データ(A)】から，さきほどダウンロードしたExcelデータを読み込む

森, 吉田(1990) p.281のデータを一部修正

	勉強法	小テストの得点	やる気
1	1	2	1
2	1	1	2
3	1	4	3
4	1	3	3
5	1	6	5
6	1	8	5
7	2	2	1
8	2	5	1
9	2	6	2
10	2	6	3
11	2	7	4
12	2	10	5
13	3	5	4
14	3	4	3
15	3	6	4
16	3	2	1
17	3	1	1
18	3	1	2

回帰の平行性の検定

① 【統計(S)】をクリックし，【一般線型モデル(G)】のメニューの中から【一変量(U)】を選択
② 小テストの点数を【従属変数(D)】の枠，勉強法を【固定因子(F)】の枠，やる気を【共変量(C)】の枠へ移動

回帰の平行性の検定②

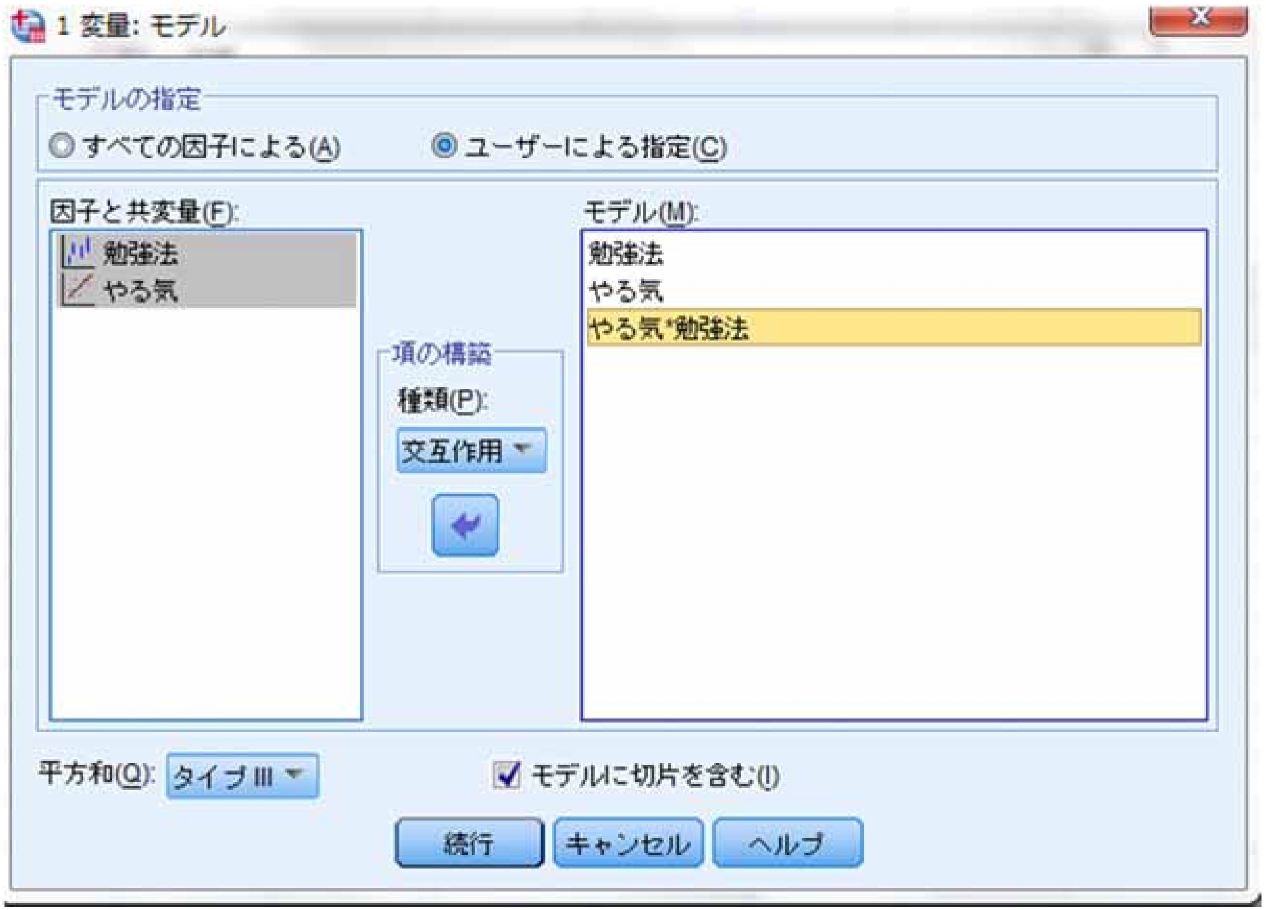
① 【モデル(M)】を左クリックし，【ユーザーの指定による(C)】を左クリック

② 左のボックスにある【勉強法】を左クリックで選択し，を左クリックして右のボックスに移動

③ 左のボックスにある【やる気】を左クリックで選択し，を左クリックして右のボックスに移動

④ 左のボックスにある【勉強法】と【やる気】を同時に選択し，項の構築が【交互作用】となっていることを確認し，を左クリックして右のボックスに移動

回帰の平行性の検定③


1 変量: モデル
モデルの指定
すべての因子による(A)
ユーザーによる指定(C)
因子と共変量(F):
勉強法
やる気
モデル(M):
勉強法
やる気
やる気*勉強法
項の構築
種類(P):
交互作用
平方和(Q):
タイプ III
モデルに切片を含む(I)
続行
キャンセル
ヘルプ

回帰の平行性の検定④

- 【続行】を左クリックし，【OK】を左クリック

被験者間効果の検定

従属変数:小テストの得点

ソース	タイプ III 平方和	自由度	平均平方	F 値	有意確率
修正モデル	99.834[a]	5	19.967	14.570	.000
切片	.513	1	.513	.374	.552
勉強法	6.567	2	3.284	2.396	.133
やる気	72.503	1	72.503	52.908	.000
勉強法 * やる気	.027	2	.013	.010	.990
誤差	16.444	12	1.370		
総和	463.000	18			
修正総和	116.278	17			

a. R2 乗 = .859 (調整済み R2 乗 = .800)

- この場合の帰無仮説は「勉強法とやる気得点の間に交互作用はない」
  - 有意確率は5%より大きいので，この帰無仮説を棄却できない

⇒平行性を仮定してよい

回帰の有意性の検定＋共分散分析①

- その前に，モデルを元に戻す
  - 【モデル(M)】を左クリックし，【全ての因子による(A)】を左クリックして，続行を左クリック
- 【オプション(O)】を左クリックし，表示の下の【パラメータ推定値(T)】があるので，これを左クリック
- 左のボックス内の勉強法を左クリックし，を左クリックし右のボックスへ移動。
  さらに【主効果の比較(C)】を左クリック

回帰の有意性の検定＋共分散分析②

- 【続行】を左クリックし，【OK】を左クリック
- まず，回帰性の検定

パラメータ推定値

従属変数:小テストの得点

パラメータ	B	標準誤差	t値	有意確率	95% 信頼区間	
					下限	上限
切片	-.443	.634	-.699	.496	-1.803	.917
やる気	1.444	.182	7.950	.000	1.054	1.833
[勉強法=1]	-.129	.638	-.203	.842	-1.497	1.239
[勉強法=2]	2.593	.627	4.135	.001	1.248	3.937
[勉強法=3]	0[a]	.	.	.	.	.

a. このパラメータは冗長であるためゼロに設定されます。

- この場合の帰無仮説は，「傾きβは0である」
  - 有意確率が5%よりも小さいので，帰無仮説を棄却可能。つまり傾きβは0より大きいと考えられる

⇒共分散分析を実施することに，意味があるといえる

回帰の有意性の検定＋共分散分析③

- 次に参加者間効果の検定

被験者間効果の検定

従属変数:小テストの得点

ソース	タイプ III 平方和	自由度	平均平方	F 値	有意確率
修正モデル	99.807[a]	3	33.269	28.278	.000
切片	.525	1	.525	.447	.515
やる気	74.362	1	74.362	63.206	.000
勉強法	28.185	2	14.092	11.978	.001
誤差	16.471	14	1.177		
総和	463.000	18			
修正総和	116.278	17			

a. R2 乗 = .858 (調整済み R2 乗 = .828)

- この場合帰無仮説は，「勉強法の3つの水準間に差はない」
  - 有意確率が5%より小さいので，帰無仮説を棄却可能

⇒勉強法のどこかのペアに差があるといえる

多重比較

- 分散分析において，(単純)主効果が有意だったとき，どの水準間に有意差があったか検定を行う
  - 水準間の差を知りたいのなら，t検定を繰り返せばいいんじゃないの…？
- n回検定を繰り返すと，少なくとも1度Type Ⅰ errorを犯す確率は，$1 - (1 - 0.05)^n$となる
  - 今回の場合3回繰り返すので約14%
  - Type Ⅰ error = 帰無仮説が正しいのに，これを棄却してしまう誤り

<u>⇒ざっくりいうと，検定法を工夫することで，Type Ⅰ errorが生じる可能性を抑える</u>

多重比較の例【Bonferroniの方法】

- 対比較それぞれの有意確率を調節する方法
- 有意水準を5%に設定する場合，それぞれの対比較の有意水準を【5/ (対比較の数)%】に設定する

- ボンフェローニの不等式

k(1,2.....k)個の事象Eに対し下記の数式が成り立つ

$$P(\sum_{i=1}^{k} Ei) \leq \sum_{i=1}^{k} P(Ei)$$

- K= 3を代入すると，

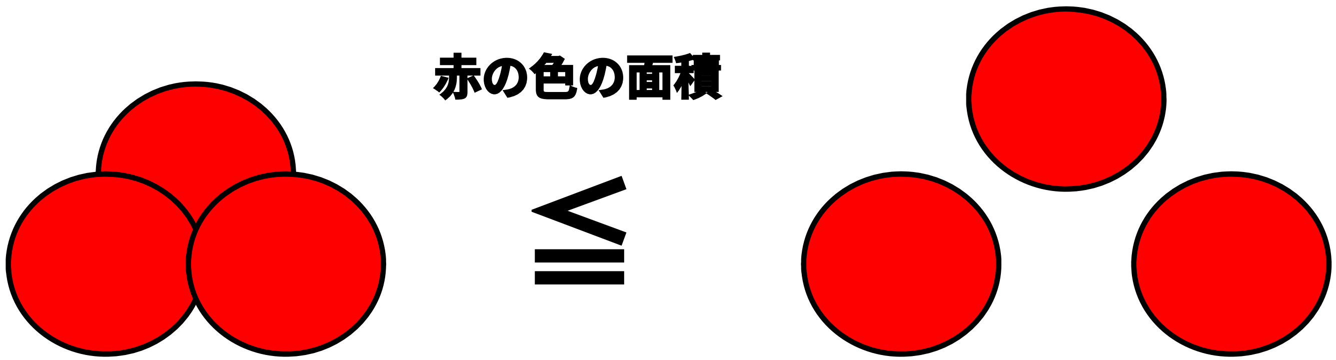
$$P\ (E_1 \cup E_2 \cup E_3) \leqq P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)$$

  - つまり，E_1またはE_2またはE_3が生じる確率は，E_1からE_3のそれぞれの事象が生じる確率の和以下となる

多重比較の例【Bonferroniの方法】②

- 有意水準をP_eに設定し，k回検定を繰り返す場合，どれか1つの検定においてこれが生じる確率はkP_eを越えない
  - よって，それぞれの対比較において有意水準をP_e/ kに設定してやれば，k回検定を繰り返しても全体のType Ⅰ errorが生じる確率はP_eを越えることがない

⇒しかし，検定力が低下してしまうという難点も



多重比較②

ペアごとの比較

従属変数:小テストの得点

(I) 勉強法	(J) 勉強法	平均値の差 (I-J)	標準誤差	有意確率[a]	95% 平均差信頼区間[a] 下限	上限
1	2	-2.722*	.633	.002	-4.442	-1.002
	3	-.129	.638	1.000	-1.863	1.604
2	1	2.722*	.633	.002	1.002	4.442
	3	2.593*	.627	.003	.889	4.297
3	1	.129	.638	1.000	-1.604	1.863
	2	-2.593*	.627	.003	-4.297	-.889

推定周辺平均に基づいた

*. 平均の差は .05 水準で有意です。
a. 多重比較の調整: Bonferroni。

- この場合帰無仮説は，それぞれのペアの平均値に差がない
  - 勉強法1と2，勉強法2と3の間の比較が，有意確率が5%以下なのでこれらのペアの帰無仮説を棄却可能

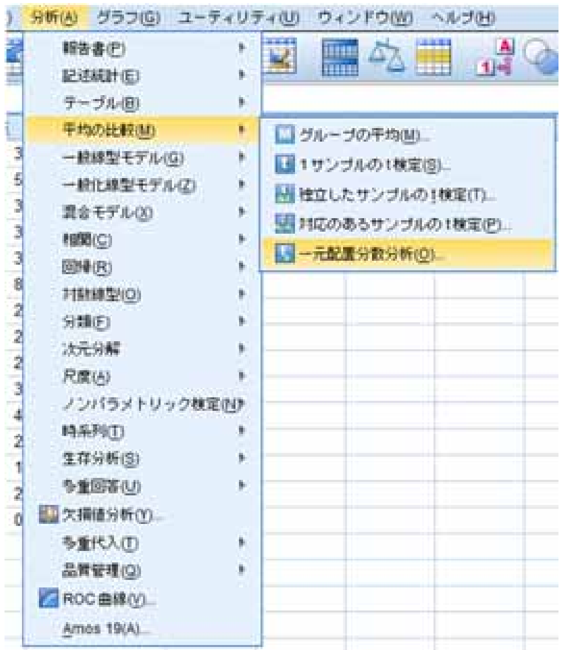
⇒勉強法2が最も効果があり，勉強法1と勉強法3の間には差がないといえる

分散分析との比較

例. 3つの勉強法のうちどれが最も効果がある方法か，小テストの得点(10点満点)を従属変数として検定する

分散分析との比較②

- 【分析(A)】→【平均値の比較(M)】→【一元配置分散分析(O)】を選択
- 【従属変数リスト(E)】に小テストの得点を，【因子(F)】に勉強法を入れる



分散分析との比較③

- 【オプション(O)】を左クリックし，【等分散性の仮定(H)】を左クリックし，【続行】を左クリック

分散分析との比較④

- 【その後の検定(H)】を左クリックし，【Bonferroni(B)】にチェックを入れ，【続行】を左クリック

分散分析との比較⑤

- OKを左クリックすると，結果が出力される

等分散性の検定

小テストの得点

Levene 統計量	自由度1	自由度2	有意確率
.083	2	15	.920

- この場合の帰無仮説は，「3つの勉強法の分散は互いに等しい」
  - 有意確率が5%以上なので帰無仮説を棄却できない

⇒等分散の仮定が成り立っているといえる

分散分析との比較⑥

分散分析

小テストの得点

	平方和	自由度	平均平方	F 値	有意確率
グループ間	25.444	2	12.722	2.101	.157
グループ内	90.833	15	6.056		
合計	116.278	17			

- 共分散分析では勉強法の効果が有意であったが，分散分析では有意でない

ついでに多重比較

多重比較

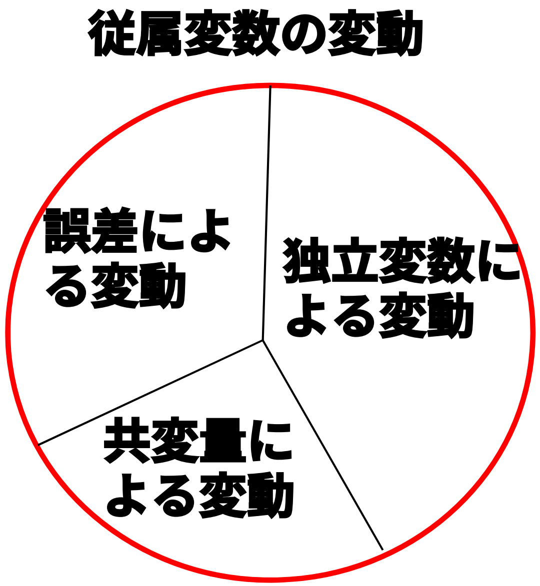
小テストの得点
Bonferroni

(I) 勉強法	(J) 勉強法	平均値の差 (I-J)	標準誤差	有意確率	95% 信頼区間	
					下限	上限
1	2	-2.000	1.421	.539	-5.83	1.83
	3	.833	1.421	1.000	-2.99	4.66
2	1	2.000	1.421	.539	-1.83	5.83
	3	2.833	1.421	.194	-.99	6.66
3	1	-.833	1.421	1.000	-4.66	2.99
	2	-2.833	1.421	.194	-6.66	.99

- 共分散分析では勉強法2が一番得点が高かったのに，分散分析ではすべてのペアの平均値の差が有意でなくなった

共分散分析と分散分析

- なぜ，共分散分析では勉強法の効果が有意だったが，分散分析では有意でなかった？
  - 小テストの得点にやる気が影響を与えており，それが誤差に含まれていたため，分散分析の検定力が低下した可能性



共分散分析があるなら剰余変数なんて怖くない？

- 特に心理学では，想定可能な剰余変数が多すぎる……
  - 例題では，期末テストの得点や勉強量，授業態度，塾で勉強している量，読書量などなど
  - それをすべて測定することは困難

- 共分散分析では従属変数に対し影響が強そうな剰余変数を測定することが望ましい
  - 既存の理論，経験，直観などを頼りに

参考文献

石村貞夫(1997).　SPSSによる分散分析と多重比較の手順　東京図書

南風原朝和(2002).　心理統計学の基礎　有斐閣

森　敏昭・吉田寿夫(1990).　心理学のためのデータ解析テクニカルブック　北大路書房　pp.279-282.

渡部　洋(1988).　心理・教育のための多変量解析入門ー基礎編　福村出版