RT分布の分析
ex-Gaussian分布のQML推定

教育学研究科教育科学専攻
教育認知心理学講座
廣井隆志

2013/7/17 発表

発表概要

- 最尤法によるex-Gaussian分布のパラメータの推定は100ほどの観測値が必要である

- QML推定法は40ほどの観測値でもよい

- QML推定を理解し、それを行ってくれるプログラムQMPEを使用してみる（デモ）

復習：なぜRT分布？

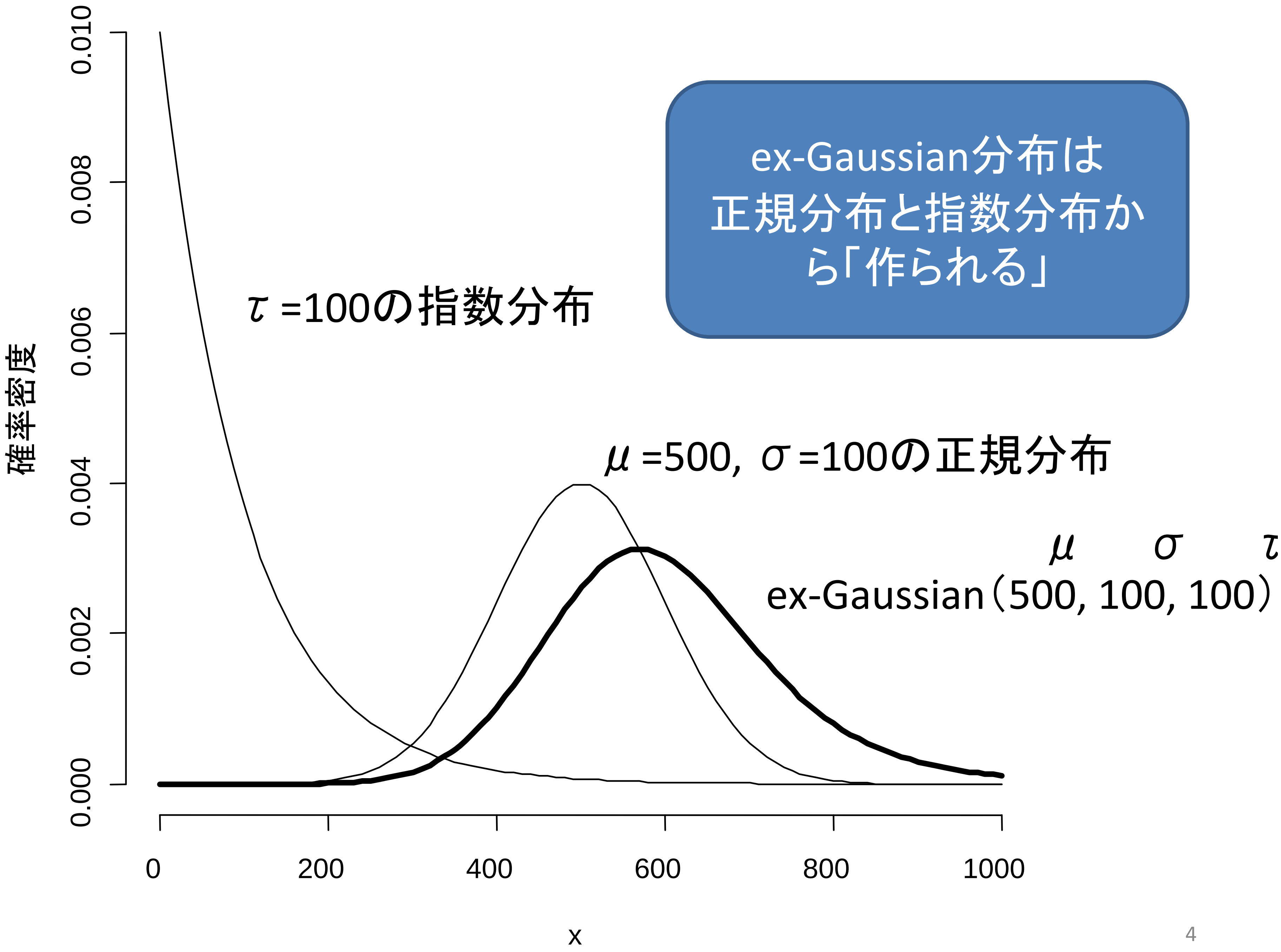
- ある操作の効果（平均の差分）が生じた場合、どのような分布の変化によって生じたものなのかがわからない

例　初婚年齢が10年ごとに平均で〇〇歳遅くなっている。
  - （1）分布全体が右にシフトした
  - （2）右の尾（すそ）が長くなった
  - （3）その両方が生じている

- ある操作の効果（平均の差分）が生じていない場合でも、分布には影響しているかもしれない
  - 例（4）分布全体は右にシフトしているが、右の尾（すそ）が短くなり、平均ではトレードオフされた

→**これらの問題を解決するには、ある操作（要因）の効果が分布（の形状）にどのような影響を与えるのかを分析することが必要である。**

ex-Gaussian分布を用いた分析はその一つの方法である



ex-Gaussian分布は
正規分布と指数分布から「作られる」
τ =100の指数分布
μ =500, σ =100の正規分布
μ σ τ
ex-Gaussian（500, 100, 100）
確率密度
0.000
0.002
0.004
0.006
0.008
0.010
0
200
400
600
800
1000
x

1．最尤法による推定の問題

- ex-Gaussian分布のパラメータを推定するとき、最尤法を用いると説明した。
- しかし、安定した推定値を得るためには各参加者、各条件で100ほどの観測数が必要であった。

- もっと少ない観測数では無理だろうか？

２．QML推定法

- Quantile Maximum Likelihood（Heathcote, Brown, & Mewhort , 2002）では、40の観測値でも安定した推定値を提供するという。

２．QML推定法の概要

- 分位数に基づく推定方法
  - p分位数：標本分布をp：1-pに分ける値のこと（pは0以上1以下の値）
- 分位数を用いて、最尤法を行なう

２．QML推定法の概要

ステップ１　　pを複数選ぶ

ステップ２　　対応する分位数（推定値）を求める

ステップ３　　分位数間のデータ数を求める

ステップ４　　尤度の関数を最大化させるパラメータ推定値を採用する

２．QML推定法の例（Speckman & Rouder, 2004）

ステップ１

pを複数選ぶ

$0<p_1<\ldots<p_{m-1}<1$

今回は…p1=.125　p2=.375　p3=.625　p4=.875

Table 1
Example With 20 Observations

413	413	**431**	435	451
461	476	**476**	481	503
509	511	**525**	555	565
613	614	**647**	697	767

２．QML推定法の概要

ステップ１　　pを複数選ぶ

ステップ２　　対応する分位数（推定値）を求める

ステップ３　　分位数間のデータ数を求める

ステップ４　　尤度の関数を最大化させるパラメータ推定値を採用する

２．QML推定法の例（Speckman & Rouder, 2004）

ステップ2

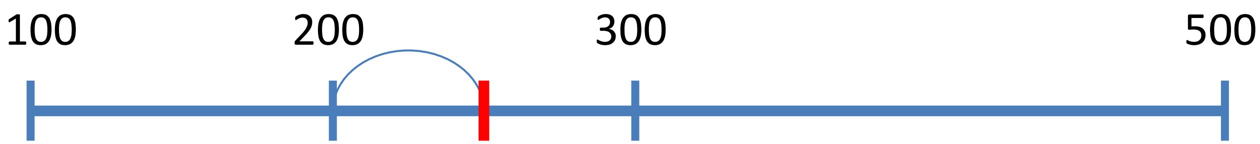
- QMLでは、分位数の推定値は隣接した順序統計量の重みづけ平均値を用いている
  - 順序統計量　RTを昇順で並べたとき、いちばん小さいものが第1順序統計量になる

2. 参考

参考例

RT_1=100 , RT_2=200 , RT_3= 300 , RT_4= 500

px=0.5に対応するpx分位数=qxは？



データ数は4つ。だから、4×0.5+0.5=2.5

qxは第2.5順序統計量といえる。それは、RT_2とRT_3の間にある。

qx=200+(300-200)*(2.5-2)=250

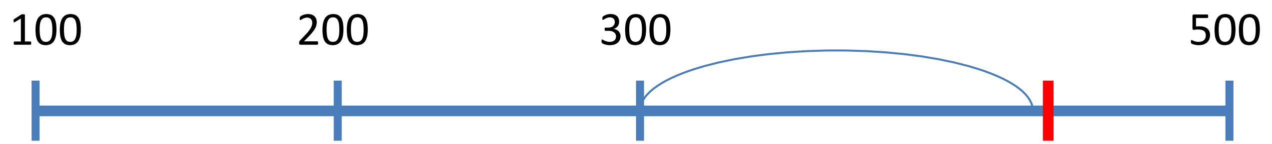
２．参考

$$qy = \frac{0.3 * 300 + 0.7 * 500}{0.7 + 0.3}$$

参考例

RT_1=100 , RT_2=200 , RT_3= 300 , RT_4= 500

py=0.8に対応するpy分位数=qyは？



データ数は4つ。だから、4×0.8+0.5=3.7

qyは第3.7順序統計量といえ、RT_3とRT_4の 間にある。

qy=300+(500-300)*(3.7-3)=440

２．QML推定法の例（Speckman & Rouder, 2004）

ステップ2（つづき）

- p1（=0.125）分位数は？
  - 20 × 0.125 + 0.5 = 3 → 第3順序統計量

- p1からp4に対応する分位数の推定値は第3、第8、第13、第18順序統計量である（表1の太字のRT）
  - これらの観測値をベクトルq=(431, 476, 525, 647)で表現しておく。

２．QML推定法の概要

ステップ１　　pを複数選ぶ

ステップ２　　対応する分位数（推定値）を求める

ステップ３　　分位数間のデータ数を求める

ステップ４　　尤度の関数を最大化させるパラメータ推定値を採用する

２．QML推定法の例（Speckman & Rouder, 2004）

ステップ３

- 分位数推定値は観測値をセルまたはビンに分割している
- 分位数推定値によって定義される各セル内の観測値の数を求める（今回はセルは5個）

Table 1
Example With 20 Observations

413	413	**431**	435	451
461	476	**476**	481	503
509	511	**525**	555	565
613	614	**647**	697	767

２. QML推定法の例（Speckman & Rouder, 2004）

- 求め方（定義）は複数ある。
- QMLでは、次の方法を使っている。

n= 全観測数×（p x ー p(x-1) ）

２. QML推定法の例（Speckman & Rouder, 2004）

- 413(q0)～431(q1)のセルには何個の観測値？

  20 * (0.125 - 0) = 2.5（個）

- 431(q1)～476(q2)のセルでは？

  20 * (0.375 - 0.125) = 5

- 各セルのデータ数の個数を表す
  ベクトルn=(2.5 , 5 , 5 , 5 , 2.5)が求まる

２．QML推定法の概要

ステップ１　　　確率（割合）を決める

ステップ２　　　対応する分位数推定値を求める

ステップ３　　　分位数間のデータ数を求める

ステップ４　尤度の関数を最大化させるパラメータ推定値を採用する（最尤法）

復習：最尤法

- 母集団に特定の分布（e.g. 正規分布）を仮定したとき、観察された値（標本）が**最も確率的に起こり得る**ようにパラメータを推定する推定法のひとつ。
  - 今回の母集団分布はex-Gaussian分布である。

２．QML推定法の例（Speckman & Rouder, 2004）

ステップ４

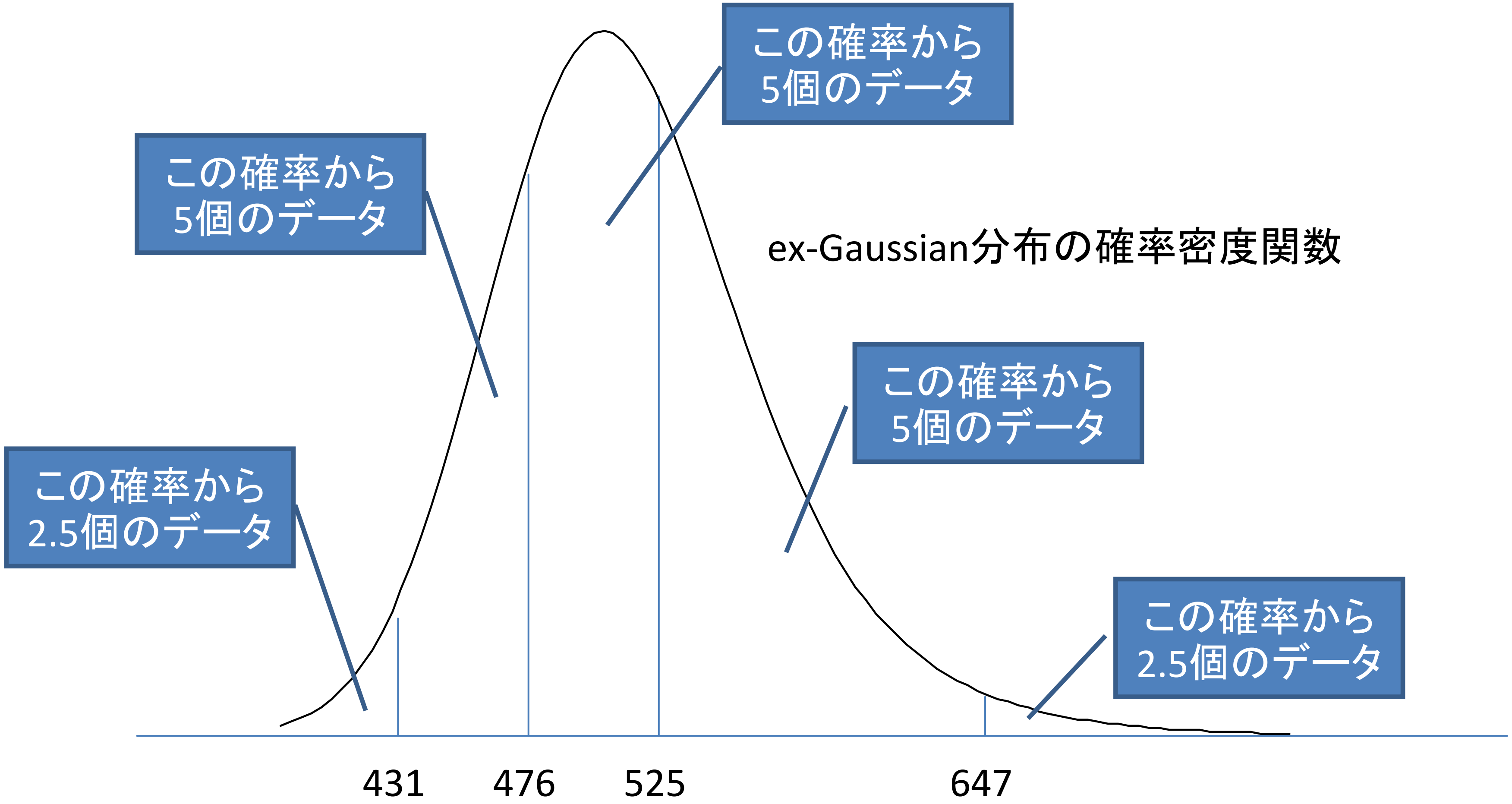
- 尤度L_Mを求め、それが最大になるパラメータ推定値を探す

$$L_M(\vec{\theta} \mid \vec{q},\vec{n}) \propto F(431;\vec{\theta})^{2.5}\left[F(476;\vec{\theta}) - F(431;\vec{\theta})\right]^5$$
$$\times\left[F(525;\vec{\theta}) - F(476;\vec{\theta})\right]^5$$
$$\times\left[F(647;\vec{\theta}) - F(525;\vec{\theta})\right]^5$$
$$\times\left[1 - F(647;\vec{\theta})\right]^{2.5}.$$

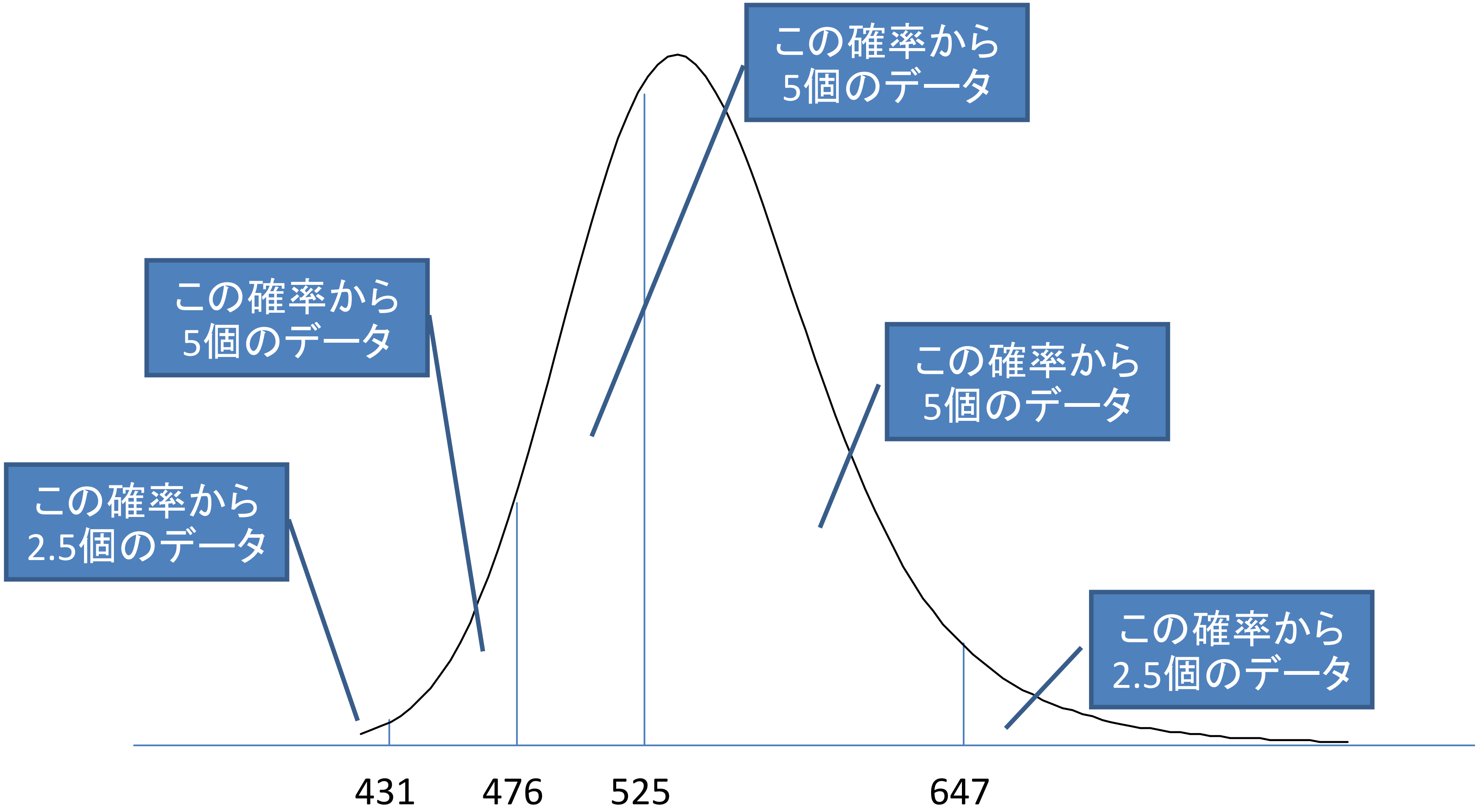
適合させる分布の確率密度関数をｆとし、その累積関数をＦとする

右辺が意味していることは？

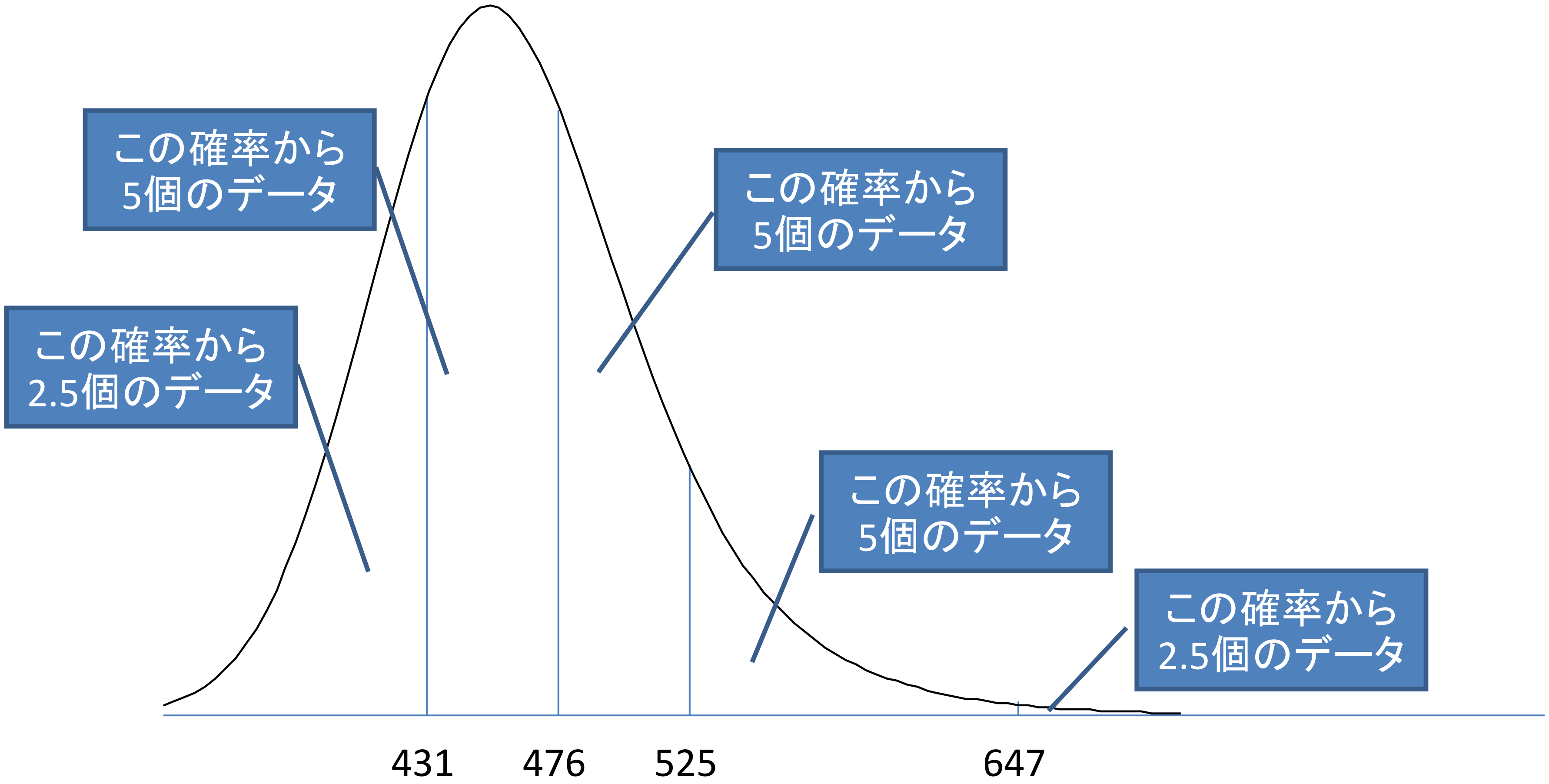
２．QML推定法の例（Speckman & Rouder, 2004）



２．QML推定法の例（Speckman & Rouder, 2004）



２．QML推定法の例（Speckman & Rouder, 2004）



どうしてQML推定はサンプルサイズが小さくても安定した推定値が得られるのか？

Heathcote et al., 2004から

- QMLはmaximum spacings product (MSP) estimation を一般化したものといえる
  - したがって、今まで最尤法だといっていたが、正確には違う（see, Heathcote et al., 2004）

- regular problemではMSPは通常のMLに非常に似て、漸近的推定特性（例：漸近的不偏性）を持つ

どうしてQML推定はサンプルサイズが小さくても安定した推定値が得られるのか？

- irregular problems、つまり、長い尾をもつ分布、連続分布の混合物、推定しなければならない最小値を持つ分布（shift distributions）といったものの分布の推定の場合にはMSPはMLよりも成績が良い。

- MLはこれらの条件、とりわけ、RT研究で使用される対数正規、ガンマ、Weibull分布といったshift distributionsに対しては、不一致推定値が生じる場合がある。それに対し、MSPは有効性を維持する。

どうしてQML推定はサンプルサイズが小さくても安定した推定値が得られるのか？

答え？

- RT分布は一般にゆがんでいる
- その場合、MLよりもQMLの方が望ましい推定値の特性を持つ

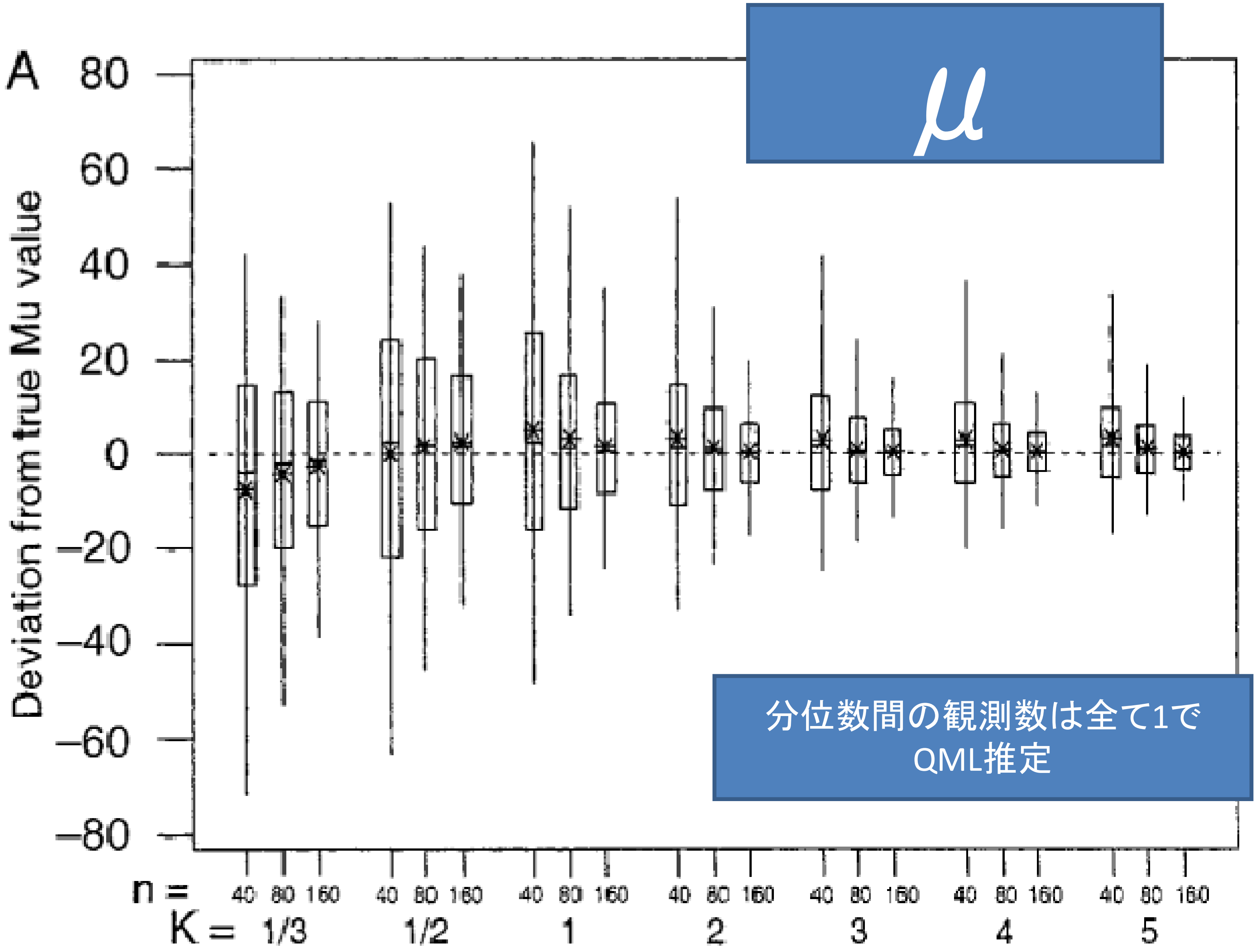
- シミュレーションがそうだから？

モンテカルロシミュレーション Heathcote et al. 2002

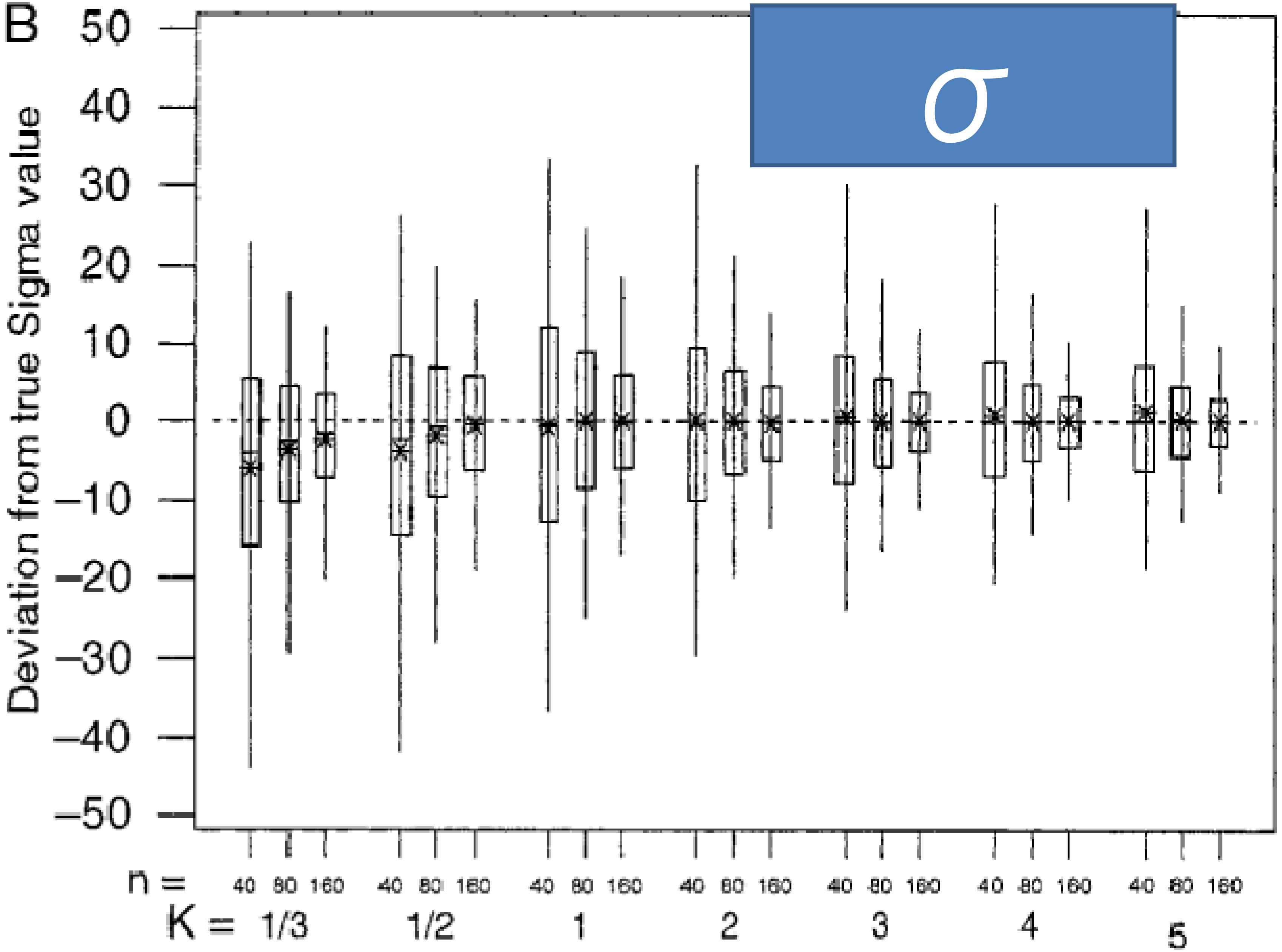
$$A = \frac{Mean - Median}{SD}$$

Table 1
Parameters and Statistics of the Simulated ex-Gaussian Distributions

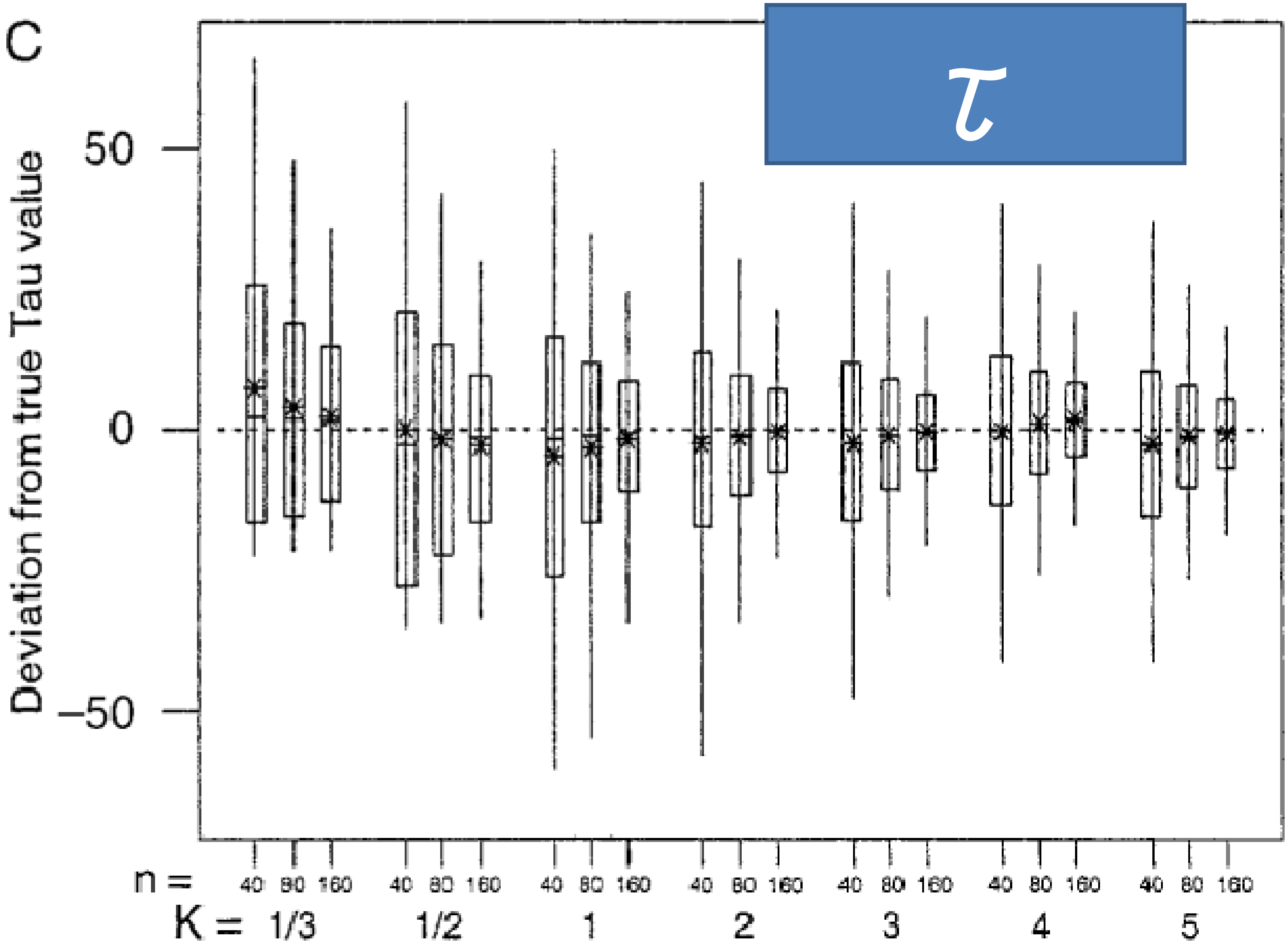
M	SD	μ	σ	τ	$K = \tau/\sigma$	A
1,000	100	968.377	94.868	31.623	1/3	0.0098
1,000	100	955.279	89.443	44.721	1/2	0.0245
1,000	100	929.289	70.711	70.711	1	0.0880
1,000	100	910.557	44.721	89.443	2	0.1890
1,000	100	905.132	31.623	94.868	3	0.2420
1,000	100	902.986	24.254	97.014	4	0.2675
1,000	100	901.942	19.611	98.058	5	0.2810



μ
A
Deviation from true Mu value
80
60
40
20
0
−20
−40
−60
−80
n =
40 80 160
K = 1/3 1/2 1 2 3 4 5
分位数間の観測数は全て1で
QML推定



B
σ
Deviation from true Sigma value
50
40
30
20
10
0
−10
−20
−30
−40
−50
n =
40 80 160
K = 1/3
1/2
1
2
3
4
5



C
τ
Deviation from true Tau value
50
0
−50
n =
40 80 160 40 80 160 40 80 160 40 80 160 40 80 160 40 80 160 40 80 160
K = 1/3 1/2 1 2 3 4 5

MLとQMLの比較（0以上がQML優勢）

偏り

誤差

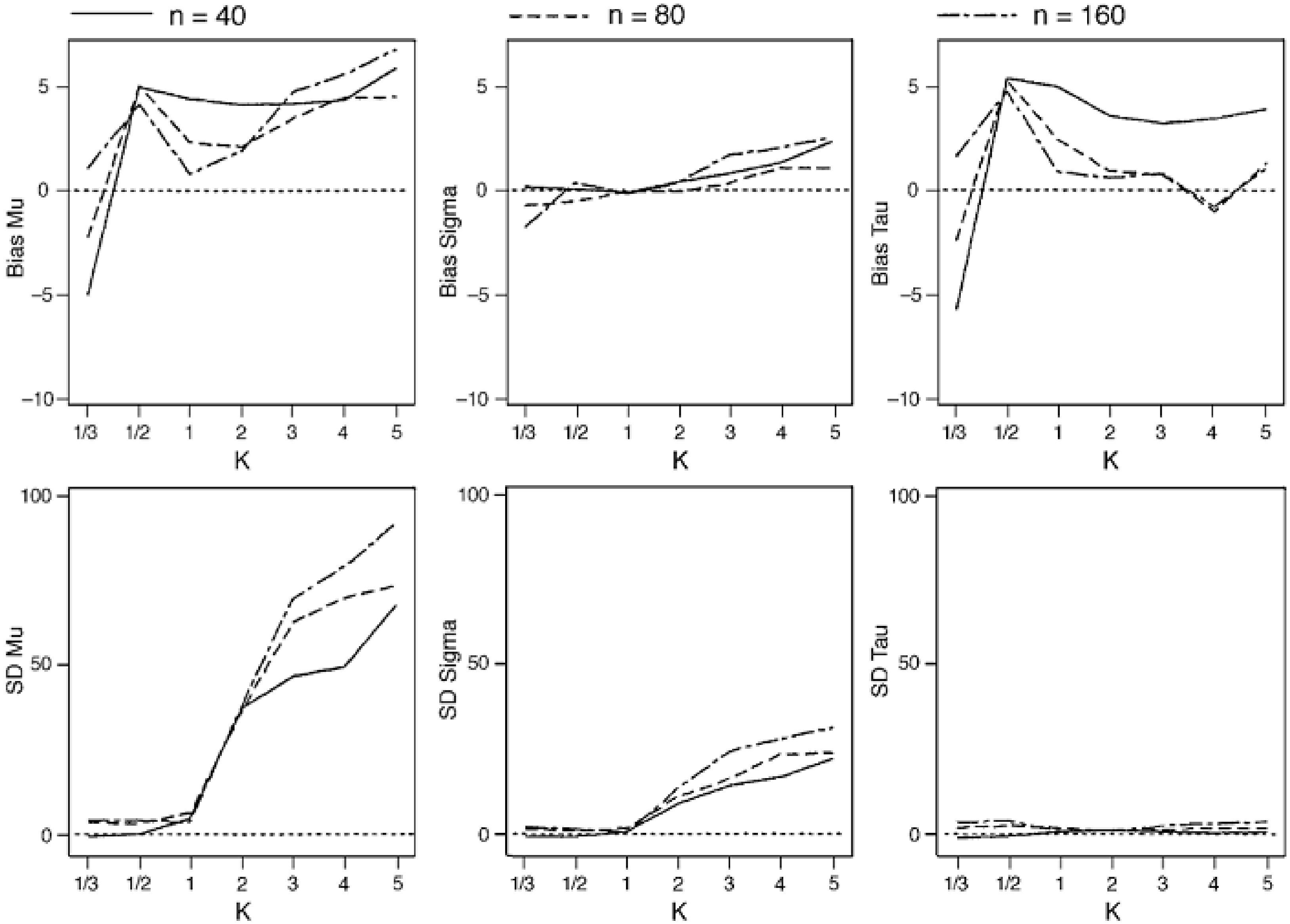


Figure 2. CML minus QML-1 bias (absolute deviation from the true value) and standard deviation.

モンテカルロシミュレーション Heathcote et al. 2002

結果と考察

- QMLは一般にCMLよりも偏りが小さく、有効性が高い。

- RT分布が対称に近いときはex-Gaussian分布へのフィッティングは有益ではない
  - A>0.15のとき（Kが2以上）、ex-Gaussian分布を使用して分布の形状を推定するのは安全

モンテカルロシミュレーション Heathcote et al. 2002

結果と考察

- QMLはex-Gaussian分布以外の分布のパラメータの推定にも使えるが、今回の結果を全ての分布でQMLがMLよりも良いと解釈するのは危険。
- なぜならQML推定値の特性は使用される特定の密度関数および分位数に左右されるからだ。
  – Van Zandt(personal communication, April 2001)は、平均100である指数分布から160のサンプルサイズを用いたとき、QML-4のパラメータの推定値はCML推定値よりも偏り、誤差も大きかったことをみつけた。

３．QMPE

- QML推定を行ってくれるプログラム
  - http://www.newcl.org/node/8
    から無料で利用可能（マニュアルもある）

- 実行に必要なもの
  - QMPE（本体）
  - データファイル
  - コントロールファイル

３. 使い方

ステップ１　　　データファイルを書く

ステップ２　　　コントロールファイルを書く

ステップ３　　　Windowsなら、QMPEを起動し、コントロールファイル名をコマンドに入力すれば出力される

３．使い方　データファイル

- データファイル
  - 2行
  - 間はタブかスペースで区切る
  - 1行目は索引番号（整数）
  - 2行目はRT

1	453
1	232
1	454
2	654
2	343
2	481
3	532
3	376

３．使い方　コントロールファイル

- コントロールファイル
  - 使用する分位数の数などを設定
  - #で始まる行はコメント扱い
  - 空列を入れずに書くこと
  - １．～12．の内容を記入する（次スライド）

３．使い方　コントロールファイル

１.「データファイル名」（プログラムと同じ場所にないときはパス名もいる）　例「01input.txt」

２．出力ファイルの語幹名　　例「01output」など

３．有効桁数（解像度）　例「0.00001」

４．fitting mode
通常は「1 」のnormal modeで。（マニュアル参照）

５～７. convergence parameter（付属サンプルと同じでよいと思われる）

８．適合させる分布　→ 「1」= ex-Gaussianを選択

３．使い方　コントロールファイル

９．通常の最尤法（「1」）、QML（「2」）。

１０．Data aggregation level：分位数に関する命令。外れ値を最初から除外しているならば、分位数を最大限とる「1」を選択すればよい。「2」なら分位数の数を、「3」ならpの値を次の行から書く

１１～１２．　１０．で「2」以上の値を選択した場合に使用。

３. 使い方　出力

WindowsならQMPEを実行。そして、コントロールファイル名を打ち込めば、出力される

出力ファイルは2つ。

＊＊＊.par

– パラメータ推定値などの数値を含む。

＊＊＊.oe

– 使用された分位数などの数値を含む。

３．使い方（デモ）

- The English Lexicon Project (Balota et al., 2007)から10人、各約35試行の語彙判断課題のRTを使用して、QMLでex-Gaussian分布にフィッティングさせる
- 外れ値を事前に処理したため、分位数の数は（データ数-1）個使用する

3. 使い方（デモ）

- .parの出力
- 左から索引番号・QML・データ数・分位数の個数・exit code・収束までの回数・μ・σ・τ・μのSE

1	1	2	36	35	3	9	463.49553552	23.53254075	91.54121252	12.30993163
2	2	2	34	33	1	7	648.12014991	57.53674019	386.79276958	39.25535474
3	3	2	35	34	1	8	643.86460426	123.97794586	279.76554966	64.06173463
4	4	2	36	35	1	7	543.88457530	76.40977686	110.83774040	32.35084343
5	5	2	31	30	1	9	629.42290894	133.15098674	132.03610485	91.07952456
6	6	2	33	32	1	7	587.53276001	91.16137413	324.82818922	48.42813126
7	7	2	34	33	1	8	554.71380578	78.36596441	184.13899618	39.81279915
8	8	2	31	30	1	12	718.43935829	94.83908997	552.97839647	60.47681226
9	9	2	30	29	1	14	487.25168815	46.01777881	251.19408534	30.61575229
10	10	2	28	27	1	11	605.18298831	65.19724858	173.33519042	35.68960855

3．使い方（デモ）

- .oeの出力
- 左から索引番号・分位数のp・pに対応する分位数の標本推定値・パラメータ推定値・対数尤度和への貢献度

1	1	.02777778	445.50000000	444.82677152	-3.53455947
2	1	.05555556	453.00000000	455.22379589	-3.94959999
3	1	.08333333	463.00000000	462.43060765	-3.28605784
4	1	.11111111	467.50000000	468.28173297	-3.84879055
5	1	.13888889	472.00000000	473.39295390	-3.73474598
6	1	.16666667	479.00000000	478.05487316	-3.18156511
7	1	.19444444	486.50000000	482.43245670	-3.01984235
8	1	.22222222	490.99999917	486.62998948	-3.48839117
9	1	.25000000	492.00000000	490.72253947	-4.98257806
10	1	.27777778	492.50000083	494.76585950	-5.67411357
11	1	.30555556	496.50000000	498.80538873	-3.59260636
12	1	.33333333	502.50000000	502.88008346	-3.19313374
13	1	.36111111	505.50000000	507.02500924	-3.90202788
14	1	.38888889	507.00000000	511.27303889	-4.60661310

４．40も多いなら…

- 階層ベイズモデルがもっと少ないサンプルサイズでも可能？

Psychonomic Bulletin & Review
2005, 12 (2), 195-223

THEORETICAL AND REVIEW ARTICLES

A hierarchical model for estimating response time distributions

JEFFREY N. ROUDER, JUN LU, PAUL SPECKMAN, DONGCHU SUN, and YI JIANG
University of Missouri, Columbia, Missouri

We present a statistical model for inference with response time (RT) distributions. The model has the following features. First, it provides a means of estimating the shape, scale, and location (shift) of RT distributions. Second, it is hierarchical and models between-subjects and within-subjects variability simultaneously. Third, inference with the model is Bayesian and provides a principled and efficient means of pooling information across disparate data from different individuals. Because the model efficiently pools information across individuals, it is particularly well suited for those common cases in which the researcher collects a limited number of observations from several participants. Monte Carlo simulations reveal that the hierarchical Bayesian model provides more accurate estimates than several popular competitors do. We illustrate the model by providing an analysis of the symbolic distance effect in which participants can more quickly ascertain the relationship between nonadjacent digits than that between adjacent digits.

文献

Balota et al. (2007) The English Lexicon Project. Behavior Research Methods, 39, 445-459.

Heathcote, Brown, & Mewhort (2002) Quantile maximum likelihood estimation of response time distributions. PB&R, 9, 394-401.

Rouder, speckman, Sun, & Jiang (2005) A hierarchical model for estimating response time distributions. PB&R, 12, 195-223.

Speckman & Rouder (2004) A comment of Heathcote, Brown, and Mewhort's QMLE method for response time distributions. 11, 574-576.

文献（続き）

QMPE v2.18

Technical Manual for QMPE v2.18: Fortran code to fit response time distributions. Brown, Cousinau, & Heathcote

http://www.newcl.org/のページから「data and software」→「data repository」→「Recognition memory frequency data」

または、 http://www.newcl.org/node/8

QMPEとそのマニュアルが利用できる

終わり